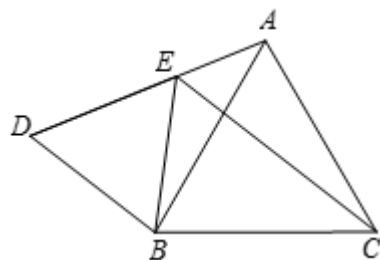


第2讲手拉手模型(加油站)

一、等边三角形手拉手

练习1

1. 已知：如图，在等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle DBE$ 中，点 A 在 DE 的延长线上，如果 $\angle ECB = 35^\circ$ ，那么 $\angle DAB =$ _____ 度。



【答案】 35

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 都是等边三角形，

$$\therefore BA = BC, BD = BE, \angle ABC = \angle DBE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ABE = \angle DBE + \angle ABE, \text{ 即 } \angle DBA = \angle EBC,$$

在 $\triangle DBA$ 和 $\triangle EBC$ 中，

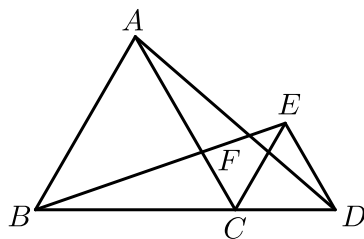
$$\begin{cases} BD = BE \\ \angle DBA = \angle EBC, \\ BA = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBA \cong \triangle EBC (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DAB = \angle ECB = 35^\circ.$$

【标注】 【知识点】 等边三角形的手拉手模型

2. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形， B, C, D 三点在一条直线上， AD 和 BE 交于 F 点，则 $\angle AFB =$ _____ $^\circ$ 。

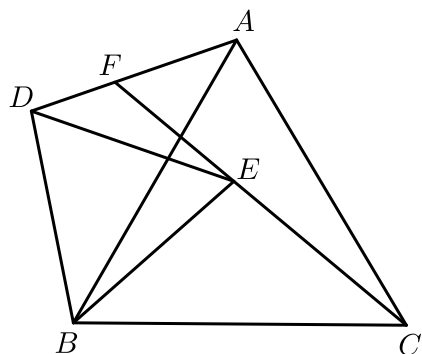


【答案】 60

【解析】 $\because \angle BCA = \angle DCE = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BCA + \angle ACE = \angle DCE + \angle ACE$,
即 $\angle BCE = \angle ACD$,
 $\because CB = CA, CE = CD$,
 $\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD$ (SAS) ,
 $\therefore \angle CBE = \angle CAD$,
由8字模型可得 $\angle AFB = \angle ACB = 60^\circ$.

【标注】 【知识点】 等边三角形的手拉手模型

3. 已知，如图等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle DBE$ ，连接 CE 并延长交 AD 于点 F ，求 $\angle DFE$ 的度数．

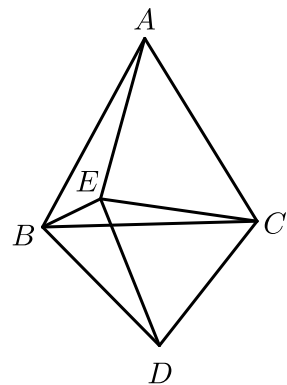


【答案】 $\angle DFE = 120^\circ$.

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 为等边三角形，
 $\therefore BD = BE, AB = BC, \angle DBA = 60^\circ - \angle ABE = \angle EBC$,
 $\therefore \triangle BEC \cong \triangle BDA$ (SAS) ,
 $\therefore \angle ECB = \angle DAB$,
 $\therefore \angle AFC = \angle ABC = 60^\circ$,
 $\therefore \angle DFE = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

【标注】 【知识点】 SAS

4. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形， $\angle EBD = 78^\circ$ ，则 $\angle AEB =$ _____ 度．



【答案】 138

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，

$$\therefore AC = BC, CE = CD, \angle BAC = 60^\circ, \angle ACB = \angle ECD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB - \angle ECB = \angle ECD - \angle ECB,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中，

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD \\ CE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle EBD = 78^\circ,$$

$$\therefore 78^\circ - \angle EBC = 60^\circ - \angle BAE,$$

$$78^\circ - (60^\circ - \angle ABE) = 60^\circ - \angle BAE,$$

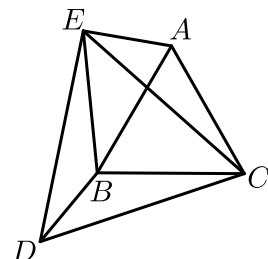
$$\therefore \angle ABE + \angle BAE = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 180^\circ - (\angle ABE + \angle BAE) = 138^\circ.$$

故答案为：138.

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

5. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，若 $\angle AEB = 70^\circ$ ，则 $\angle EBD$ 的度数是（ ）.



A. 115°

B. 120°

C. 125°

D. 130°

【答案】D

【解析】易证 $\triangle AEC \cong \triangle BDC$ ，设 $\angle AEC = \angle BDC = x$ ，

$$\text{则 } \angle BEC = \angle AEB - x = 70^\circ - x,$$

$$\angle DEB = 60^\circ - (70^\circ - x) = x - 10^\circ,$$

$$\angle EDB = 60^\circ - x,$$

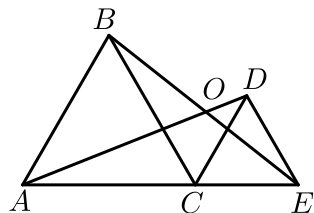
$$\therefore \angle EBD = 180^\circ - (x - 10^\circ) - (60^\circ - x) = 130^\circ,$$

选D.

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

练习2

6. 如图， C 为线段 AE 上一动点（点 C 不与点 A, E 重合），在 AE 同侧分别作正三角形 ABC 和正三角形 CDE ， AD 与 BE 交于点 O 。则下列结论错误的是（ ）。



- A. $AD = BE$ B. $AD = AE$ C. $\angle DAC = \angle EBC$ D. $\angle AOB = 60^\circ$

【答案】B

【解析】A 选项： $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 均为正三角形，

$$\therefore AC = BC, CD = CE, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \angle ACB - \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE = 120^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 与 } \triangle BCE \text{ 中 } \begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AD = BE, \text{ 故A正确；}$$

$$\text{B 选项：又 } \because \angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = \angle ADC + 60^\circ, \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE \neq \angle AED,$$

$$\therefore AD \neq AE, \text{ 故B错误；}$$

$$\text{C 选项：由①得：} \angle DAC = \angle EBC, \text{ 故C正确；}$$

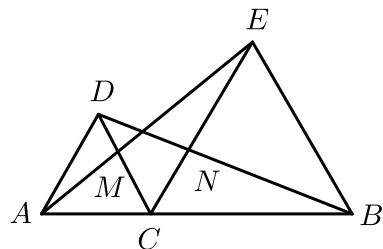
D 选项： $\angle AOB = \angle OAE + \angle OEA = \angle CBE + \angle OEA = \angle BCA = 60^\circ$ ，

故D正确．

故选 B．

【标注】【知识点】SAS

7. 如图④， $\triangle DAC$ 和 $\triangle EBC$ 均是等边三角形， AE 、 BD 分别与 CD 、 CE 交于点 M 、 N ，有如下结论：① $\triangle ACE \cong \triangle DCB$ ；② $CM = CN$ ；③ $AC = DN$ ．其中正确结论的个数为（ ）．



A. 3个

B. 2个

C. 1个

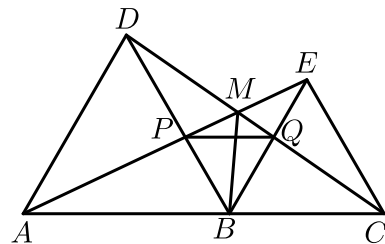
D. 0个

【答案】B

【解析】①②正确．

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

8. 如图，点 A ， B ， C 在同一直线上，在这条直线同侧作等边 $\triangle ABD$ 和等边 $\triangle BCE$ ，连接 AE 和 CD ，交点为 M ， AE 交 BD 于点 P ， CD 交 BE 于点 Q ．连接 PQ 、 BM ，有4个结论：① $\triangle ABE \cong \triangle DBC$ ．② $\triangle DBQ \cong \triangle ABP$ ．③ $\angle EAC = 30^\circ$ ．④ $\angle AMC = 120^\circ$ ．请将所有正确结论的序号填在横线上：_____．



【答案】①②④

【解析】① $\triangle ABE$ 和 $\triangle DBC$ 中，

$$\begin{cases} AB = DB \\ \angle ABE = \angle DBC, \\ BE = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DBC$ ，故①正确。

②在 $\triangle PQB$ 中， $\angle PBQ = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle PQB$ 为等边三角形。

在 $\triangle DBQ$ 和 $\triangle ABP$ 中，

$$\begin{cases} DB = AB \\ \angle DBQ = \angle ABP, \\ BQ = BP \end{cases}$$

$\therefore \triangle DBQ \cong \triangle ABP$ ，故②正确。

③条件不足，无法求 $\angle EAC$ 。

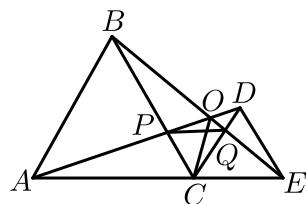
④正确， $\therefore \angle DMA = \angle EAC + \angle MCA = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AMC = 120^\circ$ 。

【标注】【知识点】SAS

【知识点】全等三角形实际生活中的应用

9. 如图， C 是线段 AE 上的一动点(不与点 A 、 E 重合)在 AE 同侧分别作等边三角形 ABC 和等边三角形 CDE ， AD 与 BE 交于点 O ， AD 与 BC 交于点 P ， BE 与 CD 交于点 Q ，连结 PQ 。以下六个结论：
① $PQ \parallel AE$ ；② $AP = BQ$ ；③ $DE = DP$ ；④ $\angle AOB = 60^\circ$ ；⑤ CO 平分 $\angle AOE$ ；⑥ $\triangle CPQ$ 为等边三角形，其中正确的是 _____。



【答案】①②④⑤⑥

【解析】 $\therefore$ 等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle CDE$ ，

$\therefore AC = BC$ ， $CD = CE$ ， $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB + \angle BCD = \angle DCE + \angle BCD$ ，即 $\angle ACD = \angle BCE$ ，

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ (SAS)，

$\therefore \angle CBE = \angle DAC$ ，

又 $\because \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = 60^\circ$ ，即 $\angle ACP = \angle BCQ$ ，

又 $\because AC = BC$ ，

$\therefore \triangle CQB \cong \triangle CPA$ (ASA)，

$\therefore CP = CQ$ ，

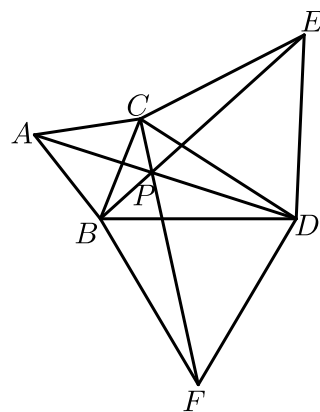
$\because \angle PCQ = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle PCQ$ 为等边三角形, 故⑥正确;
 $\therefore \angle PQC = \angle DCE = 60^\circ$,
 $\therefore PQ \parallel AE$, 故①正确,
 $\therefore \triangle CQB \cong \triangle CPA(ASA)$,
 $\therefore AP = BQ$, 故②正确,
 $\therefore AD = BE$, $AP = BQ$,
 $\therefore AD - AP = BE - BQ$, 即 $DP = QE$,
 $\therefore \angle DQE = \angle ECQ + \angle CEQ = 60^\circ + \angle CEQ$, $\angle CDE = 60^\circ$,
 $\therefore \angle DQE \neq \angle CDE$, 故③错误;
 $\therefore \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BCD = 60^\circ$,
 $\text{又} \because \angle EDC = 60^\circ = \angle BCD$,
 $\therefore BC \parallel DE$,
 $\therefore \angle CBE = \angle DEO$,
 $\therefore \angle AOB = \angle DAC + \angle BEC = \angle BEC + \angle DEO = \angle DEC = 60^\circ$, 故④正确,
 $\therefore BC \parallel DE$,
 $\therefore \angle CBE = \angle BED$,
 $\therefore \angle CBE = \angle DAE$,
 $\therefore \angle AOB = \angle OAE + \angle AEO = 60^\circ$,
 $\therefore \angle AOB = 60^\circ$
 $\therefore \angle AOE = 180^\circ - \angle AOB = 120^\circ$, 过点 C 分别作 OA 、 OE 的垂线段 CM 和 CN , 垂足为 M 、 N 分别在 OA 、 OB 上,
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE(SAS)$,
 $\therefore CM = CN$
 $\therefore \triangle OCM \cong \triangle OCN(HL)$,
 $\therefore \angle MOC = \angle NOC = 60^\circ$,
 $\therefore OC$ 平分 $\angle AOE$, 故⑤正确;
 正确的有: ①②④⑤⑥. 故答案为: ①②④⑤⑥.

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

10. 如图, 在 $\triangle BCD$ 中, $\angle BCD < 120^\circ$, 分别以 BC 、 CD 和 BD 为边在 $\triangle BCD$ 外部作等边三角形 ABC 、等边三角形 CDE 和等边三角形 BDF , 连接 AD 、 BE 和 CF 交于点 P , 下列结论中正确的

是 ____ . (只填序号即可)

① $AD = BE = CF$; ② $\angle BEC = \angle ADC$; ③ $\angle DPE = \angle EPC = \angle CPA = 60^\circ$.



【答案】 ①②③

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形,

$$\therefore BC = AC, CE = CD, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACD,$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCE = \angle ACD, \\ CE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BE = AD, \angle BEC = \angle ADC, \text{②正确};$$

$$\text{同理} \triangle FDC \cong \triangle BDE,$$

$$\therefore BE = CF,$$

$$\therefore BE = AD = CF, \therefore \text{①正确};$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD,$$

$$\therefore \angle CEP = \angle CDA,$$

$$\therefore \angle CED = \angle CDE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DEP + \angle CEP = \angle CED = 60^\circ = \angle CDP + \angle DEP,$$

$$\therefore \angle DPE = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\text{同理} \angle EPC = \angle CPA = 60^\circ, \text{即} \angle DPE = \angle EPC = \angle CPA = 60^\circ, \text{③正确}.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】等边三角形的性质

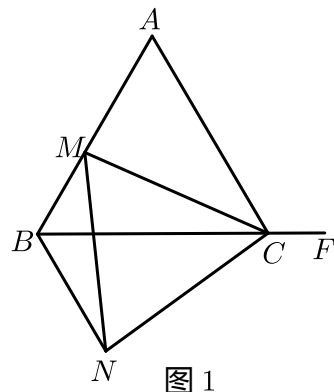
【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

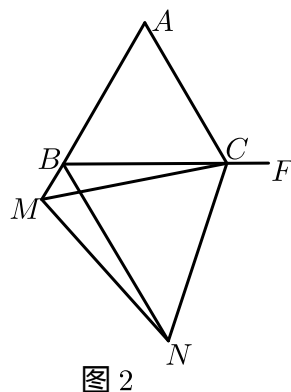
练习3

11. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 M 为直线 AB 上一动点（点 M 不与点 A ，点 B 重合）．以 CM 为边作等边 $\triangle CMN$ ，连接 BN ．

（1）如图1，当点 M 在边 AB 上时．求证： $AB = BN + BM$ ．



（2）如图2，当点 M 在边 AB 的延长线上时，其他条件不变，请写出 AB ， BM ， BN 之间存在的数量关系，并写出证明过程．



【答案】（1）证明见解析．

（2） $AB = BN - BM$ ，证明见解析．

【解析】（1）在 $\triangle CMA$ 和 $\triangle CNB$ 中，

$$\begin{cases} CM = CN \\ \angle MCA = \angle NCB, \\ CA = CB \end{cases}$$

$\therefore \triangle CMA \cong \triangle CNB$ (SAS) ,

$$\therefore AB = AM + MB = BN + BM .$$

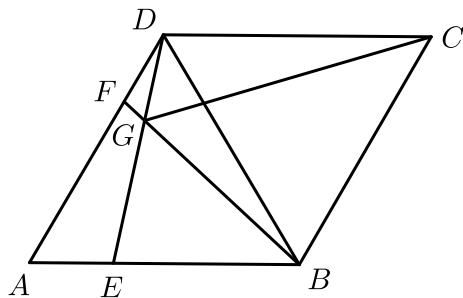
（2） $AB = BN - BM$. $\because \triangle CAM \cong \triangle CBN$ (SAS) ,

$$\therefore AB = AM - BM = BN - BM .$$

【标注】【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

12. 如图：△ABD是等边三角形，以BD为边向外作等边△DBC，点E、F分别在AB、AD上且AE = DF，连接BF与DE相交于点G，连接CG，证明下列结论：



- (1) 求证：△AED ≌ △DFB .
 (2) 求证：CG = DG + BG .

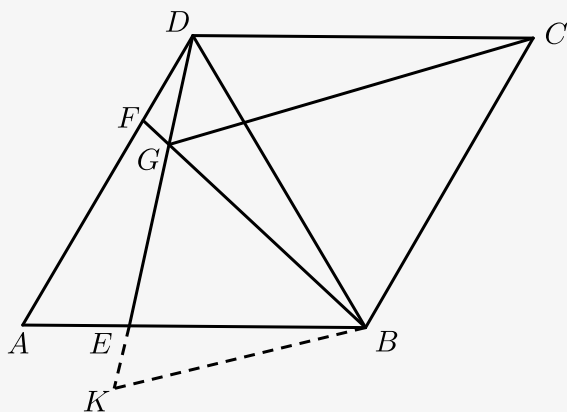
【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) 在△AED与△DFB中，
$$\begin{cases} BD = AD \\ \angle BDF = \angle DAE, \\ DF = AE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle AED \cong \triangle DFB (\text{SAS}) .$

(2) $\because \angle ADE = \angle DBF ,$
 $\therefore \angle EGB = \angle DBF + \angle EDB = 60^\circ ,$
 延长GE到K，使GK = GB，连BK，



$\therefore \triangle GBK$ 为正三角形，又△DBC为正三角形，
 $\therefore \triangle CBG \cong \triangle DBK ,$
 $\therefore CG = DK = DG + GB .$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】全等三角形的对应边与角

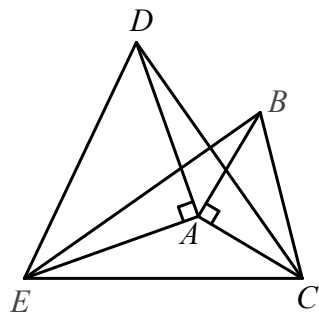
【知识点】SAS

【知识点】三角形的外角定义及性质

二、等腰直角三角形手拉手

练习4

13. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形, $\angle EAD = \angle BAC = 90^\circ$, $\angle DAB = 45^\circ$, 连接 BE , DC , EC , 则下列说法错误的是().



A. $BE = DC$

B. $AD \parallel BC$

C. $BE = DE$

D. $BE = EC$

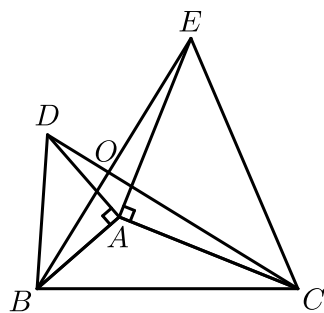
【答案】C

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形, $\angle DAB = 45^\circ$,
 $\therefore AE = AD$, $AB = AC$, $\angle EAD = \angle BAC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EAB = \angle DAC = 135^\circ$, $\therefore \triangle EAB \cong \triangle DAC$ (SAS),
 $\therefore BE = DC$, 故A正确.
 $\because \angle EAC = 360^\circ - \angle DAE - \angle DAB - \angle BAC = 135^\circ$,
 $\therefore \angle EAB = \angle EAC$, $\because EA = EA$, $AB = AC$,
 $\therefore \triangle EAB \cong \triangle EAC$ (SAS), $\therefore BE = EC$, 故D正确.
 $\because \angle DAB = \angle ABC = 45^\circ$, $\therefore AD \parallel BC$, 故B正确.
故选C.

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

14.

如图，等腰直角 $\triangle ADB$ 与等腰直角 $\triangle AEC$ 共点于 A ，连接 BE 、 CD ，则线段 BE 、 CD 具有什么样的数量关系和位置关系（ ）。



- A. 相等且垂直 B. 相等但不垂直 C. 不等但垂直 D. 不等且不垂直

【答案】 A

【解析】 $\because$ 在等腰直角 $\triangle ABD$ 和等腰直角 $\triangle ACE$ 中，

$$AD = AB, AC = AE, \angle BAD = \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAC.$$

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle DAC$ 中，

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAC = \angle BAE, \\ AC = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAC (\text{SAS}).$$

$$\therefore BE = CD, \angle ABE = \angle ADC.$$

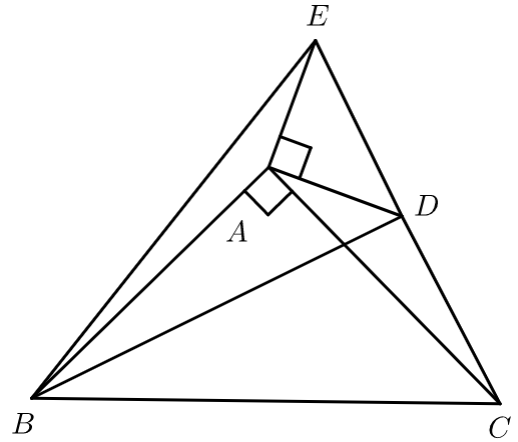
$$\therefore \text{由8字模型可得, } \angle BOD = \angle BAD = 90^\circ.$$

$$\therefore BE \perp CD.$$

故选A.

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

15. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，点 C ， D ， E 三点在同一条直线上，连接 BD ， BE 。则 $\angle BDC = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ 。



【答案】 90

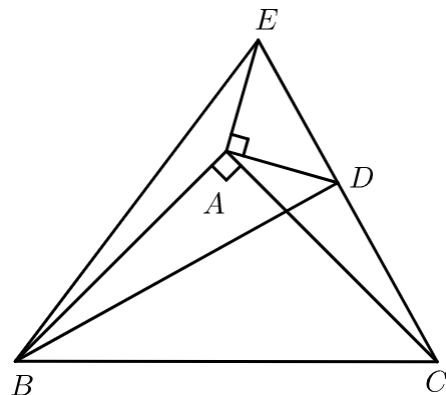
【解析】 $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD$,
 即 $\angle BAD = \angle CAE$,
 $\because$ 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS) ,
 $\therefore \angle ABD = \angle ACE$,
 $\because \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle DBC + \angle DCB = \angle DBC + \angle ACE + \angle ACB = 90^\circ$,
 则 $\angle BDC = 90^\circ$.

【标注】 【知识点】 蝴蝶型（8字倒角）；等腰直角三角形的手拉手模型

16. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，点 C ， D ， E 三点在同一条直线上，连接 BD ， BE 。则 $\angle ACE + \angle DBC =$ _____ $^\circ$ 。



【答案】 45

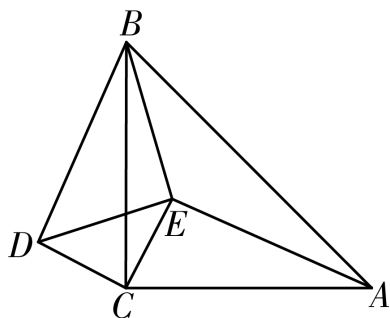
【解析】 $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD$,
 即 $\angle BAD = \angle CAE$,
 $\because$ 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS})$,
 $\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形 ,
 $\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ$,
 $\because \triangle BAD \cong \triangle CAE$,
 $\therefore \angle ABD = \angle ACE$,
 $\therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$.

【标注】 【知识点】 等腰直角三角形的手拉手模型

17. 如图 , $AC = BC$, $DC = EC$, $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$, 且 $\angle EBD = 42^\circ$, 求 $\angle AEB$ 的度数 .



【答案】见解析

【解析】解： $\because \angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BCD = \angle ACE,$$

在 $\triangle BDC$ 和 $\triangle AEC$ 中,

$$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCD = \angle ACE \\ DC = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDC \cong \triangle AEC (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DBC = \angle EAC,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle DBC + \angle EBC = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC + \angle EBC = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle EAB = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 180^\circ - (\angle ABE + \angle EAB) = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ.$$

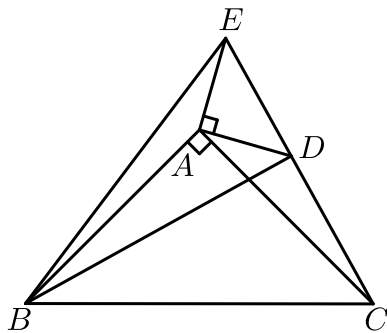
【标注】【知识点】SAS

练习5

18. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，点 C ， D ， E 三点在同一条直线上，连接 BD ， BE 。以下结论：

① $BD = CE$ ；② $\angle ABD = \angle ACE$ ；③ $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ；

其中结论正确的个数是（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

【答案】C

【解析】① $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD, \text{ 即 } \angle BAD = \angle CAE,$$

$\therefore$ 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS})$,

$\therefore BD = CE$, ①项正确;

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$, ②正确;

$\therefore \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ$

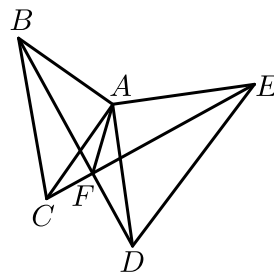
$\therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$, ③正确;

故选C.

【标注】【知识点】全等三角形实际生活中的应用

【知识点】SAS

19. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, BD , CE 交于点 F , 连接 AF . 下列结论: ① $BD = CE$; ② $BF \perp CF$; ③ AF 平分 $\angle CAD$; ④ $\angle AFE = 45^\circ$. 其中正确结论的个数有().



A. 1个

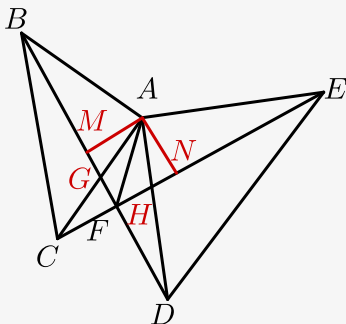
B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】



如图所示, 过点 A 分别作 $AM \perp BD$ 于点 M , $AN \perp CE$ 于点 N ,

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形,

$\therefore AB = AC$, $AD = AE$,

又 $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$, $\angle CAE = \angle DAE + \angle CAD$,

$\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\text{在} \triangle BAD \text{与} \triangle CAE \text{中有} \begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = CE, \text{故①正确.}$$

$$\angle BDA = \angle CEA,$$

$$\text{在} \triangle ADE \text{中有} \angle AED + \angle ADE = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEA + \angle CED + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED + \angle ADE + \angle BDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED + \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\text{在} \triangle DEF \text{中有} \angle EFD + \angle CED + \angle BDE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EFD = 90^\circ, \text{即} BF \perp CF, \text{故②正确.}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore S_{\triangle BAD} = S_{\triangle CAE},$$

$$\text{又} S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2} BD \times AM,$$

$$S_{\triangle CAE} = \frac{1}{2} CE \times AN, BD = CE,$$

$$\therefore AM = AN,$$

$$\text{又} AM \perp BD, AN \perp CE,$$

$$\therefore AF \text{平分} \angle BFE,$$

$$\text{又} \angle BFE = 180^\circ - \angle EFD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \frac{1}{2} \angle BFE = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ, \text{故④正确.}$$

如图所示, 设 AC 与 BD 交点为 G , AD 与 CE 交点为 H ,

$$\text{在} \triangle AFG \text{与} \triangle AFH \text{中有} AF = AF, \angle AFG = \angle AFH = 45^\circ,$$

而根据已知条件无法得到 $FG = FH$ 或 $AG = AH$, $GF = HF$, 则无法得到 $\triangle AFG$ 与 $\triangle AFH$ 全等, 无法得出 AF 平分 $\angle CAD$, 故③错误.

$\therefore$ 正确结论有①②④共3个.

故选C.

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

练习6

20. 以点 A 为顶点作两个等腰直角三角形 ($\triangle ABC$, $\triangle ADE$), 如图1所示放置, 使得一直角边重合, 连接 BD , CE .

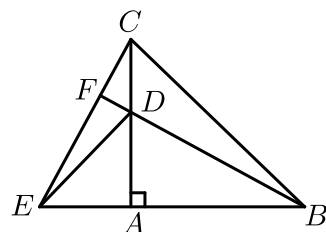


图 1

- (1) 证明 $BD = CE$.
- (2) 延长 BD , 交 CE 于 F 点 , 求 $\angle BFC$ 的度数 .
- (3) 若如图 2 放置 , 上面的结论还成立吗 ? 请简单说明理由 .

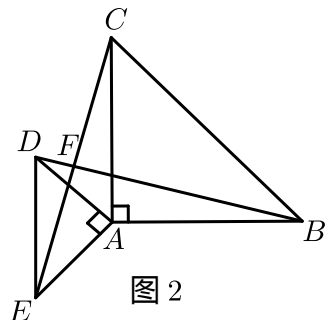


图 2

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 90° .

(3) 成立 .

【解析】 (1) $\because \triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形 ,

$$\therefore AB = AC, \angle BAD = \angle EAC = 90^\circ, AD = AE,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 中 ,

$$\begin{cases} AD = AE \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle AEC (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = CE.$$

(2) $\because \triangle ADB \cong \triangle AEC$,

$$\therefore \angle ACE = \angle ABD,$$

$$\text{而在 } \triangle CDF \text{ 中, } \angle BFC = 180^\circ - \angle ACE - \angle CDF,$$

$$\text{又 } \because \angle CDF = \angle BDA,$$

$$\therefore \angle BFC = 180^\circ - \angle DBA - \angle BDA = \angle DAB = 90^\circ.$$

(3) $BD = CE$ 成立 , 且两线段所在直线互相垂直 , 即 $\angle BFC = 90^\circ$. 理由如下 :

$\because \triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形 ,

$$\therefore AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}
&\because \angle BAC + \angle CAD = \angle EAD + \angle CAD, \\
&\therefore \angle BAD = \angle CAE, \\
&\because \text{在} \triangle ADB \text{和} \triangle AEC \text{中}, \\
&\quad \begin{cases} AD = AE \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AB = AC \end{cases} \\
&\therefore \triangle ADB \cong \triangle AEC (\text{SAS}), \\
&\therefore BD = CE, \angle ACE = \angle DBA, \\
&\angle BFC = \angle CAB = 90^\circ.
\end{aligned}$$

【标注】【能力】推理论证能力

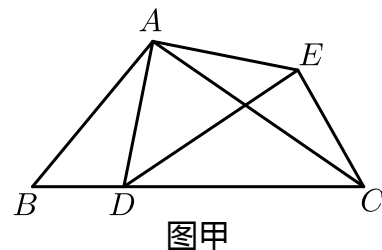
【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】全等三角形的性质

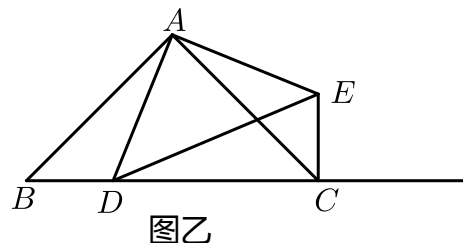
【知识点】等腰直角三角形的性质

21. 如图甲，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB$ 为锐角，点 D 为射线 BC 上一动点，连接 AD ，以 AD 为一边且在 AD 的右侧作等腰直角三角形 ADE ， $AD = AE$ ， $\angle DAE = 90^\circ$ ．解答下列问题：

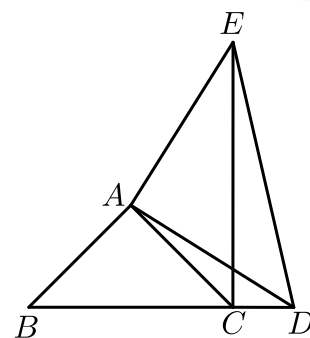


- (1) 如果 $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ．

- ① 当点 D 在线段 BC 上时（与点 B 不重合），如图乙，线段 CE 、 BD 之间的位置关系为 _____，数量关系为 _____．（不用证明）



- ② 当点 D 在线段 BC 的延长线上时，如图丙，①中的结论是否仍然成立，为什么．



图丙

(2) 如果 $AB \neq AC$, $\angle BAC \neq 90^\circ$, 点 D 在线段 BC 上运动, 试探究: 当 $\triangle ABC$ 满足一个什么条件时, $CE \perp BD$ (点 C 、 E 重合除外). 画出相应的图形, 并说明理由.

【答案】 (1) ① $CE \perp BD$; $CE = BD$

② ①中的结论成立, 证明见解析.

(2) 画图见解析, 理由见解析.

【解析】 (1) ① $\because \angle BAD = \angle CAE$,

$$\therefore AD = AE, AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore BD = CE, \angle ACE = \angle B,$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle ACE + \angle ACB,$$

$$= \angle B + \angle ACB,$$

$$= 90^\circ,$$

$$\therefore CE \perp BD.$$

$$\textcircled{2} \because \angle BAC = 90^\circ, \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore AD = AE, AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore BD = CE, \angle ACE = \angle B,$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 45^\circ,$$

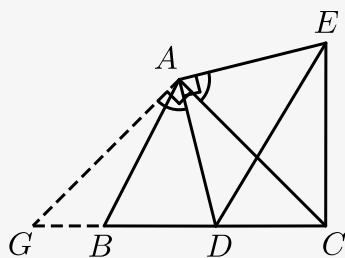
$$\therefore \angle ECB = \angle ECA + \angle ACB,$$

$$= \angle B + \angle ACB,$$

$$= 90^\circ,$$

$$\therefore EC \perp BD.$$

(2) 如图丁, 当 $\angle BCA = 45^\circ$ 时, $CE \perp BD$,



图丁

过点 A 作 $AG \perp AC$ 交 CB 于点 G ,

$$\therefore AC = AG, \angle AGC = 45^\circ,$$

即 $\triangle ACG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle GAD + \angle DAC = \angle CAE + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAD = \angle CAE,$$

$$\therefore DA = EA,$$

$$\therefore \triangle GAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle AGD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore CE \perp BD.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】等腰直角三角形的性质

【知识点】全等三角形的性质

【知识点】全等三角形的对应边与角

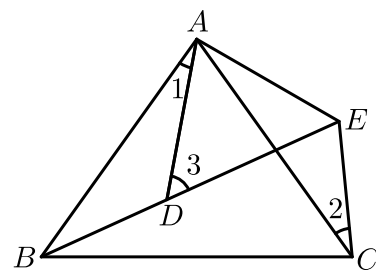
【知识点】SAS

【知识点】角的和差的计算与证明

三、任意等腰三角形手拉手

练习7

22. 如图所示, $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle BAC = \angle DAE$, B 、 D 、 E 三点共线, $\angle 1 = 25^\circ$, $\angle 2 = 30^\circ$, 则 $\angle 3 = ()$.



A. 60°

B. 55°

C. 50°

D. 无法计算

【答案】 B

【解析】 $\because \angle BAC = \angle DAE$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$,

$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$,

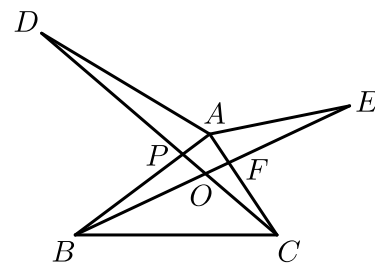
$\therefore \angle ABD = \angle 2 = 30^\circ$.

$\therefore \angle 1 = 25^\circ$,

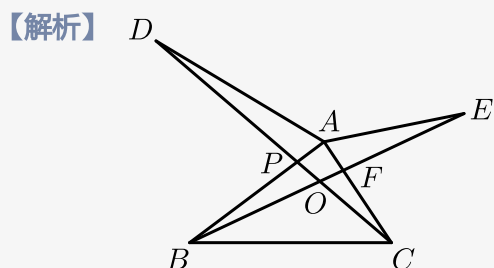
$\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle ABD = 25^\circ + 30^\circ = 55^\circ$.

【标注】 【知识点】 SAS

23. 如图, $\angle DAB = \angle EAC = 70^\circ$, $AB = AD$, $AC = AE$, BE 和 CD 相交于点 O , AB 和 CD 相交于 P , AC 和 BE 相交于 F , 则 $\angle DOE$ 的度数是 _____.



【答案】 110°



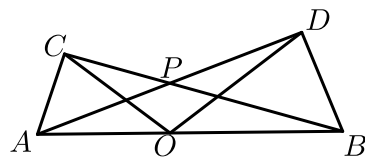
$\therefore \angle DAB = \angle EAC = 70^\circ$,
 $\therefore \angle DAB + \angle BAC = \angle BAC + \angle EAC$,
 $\therefore \angle DAC = \angle EAB$,
 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AEB$ 中 ,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAC = \angle EAB , \\ AC = AE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEB (\text{SAS})$,
 $\therefore \angle E = \angle ACD$,
 又 $\therefore \angle AFE = \angle OFC$,
 $\therefore \angle EAF = \angle COF = 70^\circ$,
 $\therefore \angle DOE = 110^\circ$.
 故答案为 : 110° .

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

24. 如图，点 O 为线段 AB 上的任意一点（不与 A, B 重合），分别以 AO, BO 为一腰在 AB 的同侧作等腰 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ ， $OA = OC$ ， $OB = OD$ ， $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 都是锐角，且 $\angle AOC = \angle BOD$ ， AD 与 BC 相交于点 P ， $\angle COD = 110^\circ$ ，则 $\angle APB = (\quad)$.



- A. 110° B. 125° C. 135° D. 145°

【答案】D

【解析】 $\therefore \angle AOC = \angle BOD$,
 $\therefore \angle AOC + \angle COD = \angle BOD + \angle COD$,
 $\therefore \angle AOD = \angle COB$,
 $\therefore$ 在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 中 ,

$$\begin{cases} AO = CO \\ \angle AOD = \angle COB , \\ OD = OB \end{cases}$$

 $\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB (\text{SAS})$,
 $\therefore \angle DAO = \angle BCO$,
 $\therefore \angle DAO + \angle COA = \angle BCO + \angle CPA$,
 $\therefore \angle CPA = \angle COA = \angle BOD = (180^\circ - \angle COD) \div 2 = 35^\circ$,

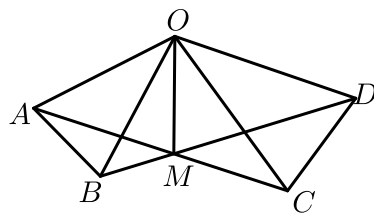
$$\therefore \angle APB = 180^\circ - \angle CPA = 145^\circ .$$

故选D .

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

练习8

25. 如图，在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中， $OA = OB$ ， $OC = OD$ ， $OA < OC$ ， $\angle AOB = \angle COD = 36^\circ$ ，连接 AC 、 BD 交于点 M ，连接 OM ．有下列结论：① $AC = BD$ ，② $\angle AMB = 36^\circ$ ，③ OM 平分 $\angle AOD$ ．其中正确的结论有 _____（只填序号）．



【答案】 ①②

【解析】 $\because \angle AOB = \angle COD = 36^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD ,$$

在 $\triangle OAC$ 和 $\triangle OBD$ 中，

$$\begin{cases} OA = OB \\ \angle AOC = \angle BOD , \\ OB = OD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OAC \cong \triangle OBD .$$

$$\therefore AC = BD , \text{ 故①正确 ;}$$

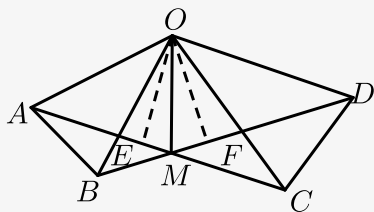
$$\because \triangle OAC \cong \triangle OBD ,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OBD ,$$

$$\therefore \angle OAC + \angle AOB = \angle OBD + \angle AMB ,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle AOB = 36^\circ , \text{ 故②正确 ;}$$

过点 O 作 $OE \perp AC$ 于 E ，过点 O 作 $OF \perp BD$ 于 F ，



$$\therefore \angle AEO = \angle BFO = 90^\circ ,$$

$\therefore$ 在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle OBF$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEO = \angle BFO \\ \angle OAE = \angle OBF \\ OA = OB \end{cases}$$

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OBF$,

$\therefore OE = OF$,

$\therefore OE \perp AM, OF \perp DM$,

$\therefore OM$ 平分 $\angle AMD$.

由题中已知条件无法得到 OM 平分 $\angle AOD$, 故③错误;

故正确的是①②.

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

26. 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 与等腰 $\triangle ADE$, $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle BAC = \angle DAE = \alpha$, 连接 BD 和 CE 相交于点 P , 交 AC 于点 M , 交 AD 与点 N , 下列结论:

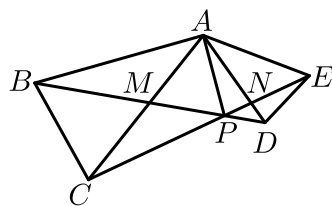
① $BD = CE$;

② $\angle BPE = 180^\circ - 2\alpha$;

③ AP 平分 $\angle BPE$;

④若 $\alpha = 60^\circ$, 则 $PE = AP + PD$;

其中正确的是 _____.



【答案】 ①③④

【解析】 $\because \angle BAC = \angle DAE = \alpha$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$, 且 $AB = AC$, $AD = AE$,

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS),

$\therefore BD = CE$, 故①符合题意;

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$,

$\because \angle BAC = \alpha$,

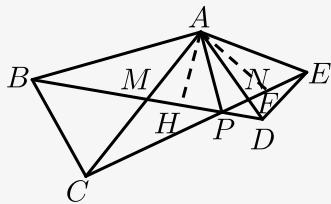
$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \alpha$,

$\therefore \angle BPE = \angle PBC + \angle PCB = \angle PBC + \angle ACB + \angle ACP$

$$= \angle PBC + \angle ACB + \angle ABP,$$

$\therefore \angle BPE = \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \alpha$, 故②不符合题意;

如图, 过点A作 $AH \perp BD$, $AF \perp CE$,



$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

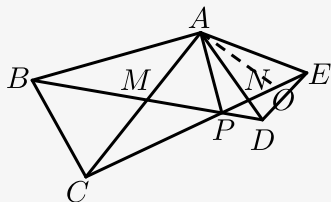
$$\therefore S_{\triangle BAD} = S_{\triangle CAE},$$

$$\therefore \frac{1}{2}BD \times AH = \frac{1}{2}CE \times AF, \text{ 且 } BD = CE,$$

$$\therefore AH = AF, \text{ 且 } AH \perp BD, AF \perp CE,$$

$\therefore AP$ 平分 $\angle BPE$, 故③符合题意;

如图, 在线段PE上截取 $OE = PD$, 连接AO,



$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle CEA, \text{ 且 } OE = PD, AE = AD,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle APD (\text{SAS}),$$

$$\therefore AP = AO,$$

$$\therefore \angle BPE = 180^\circ - \alpha = 120^\circ, \text{ 且 } AP \text{ 平分 } \angle BPE,$$

$$\therefore \angle APO = 60^\circ, \text{ 且 } AP = AO,$$

$\therefore \triangle APO$ 是等边三角形,

$$\therefore AP = PO,$$

$$\therefore PE = PO + OE,$$

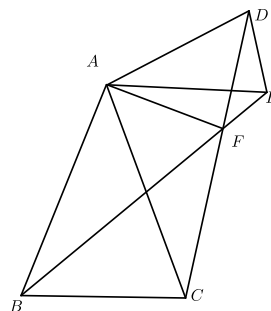
$$\therefore PE = AP + PD, \text{ 故④符合题意.}$$

故答案为: ①③④.

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

练习9

27. 已知等腰 $\triangle ABC$ 和等腰 $\triangle ADE$ 共顶点A, $AB = AC$, $AD = AE$, 顶角 $\angle DAE = \angle BAC$, F是线段BE和CD的交点, 连AF, 请写出 $\angle AFC$ 与 $\angle ADE$ 之间的等量关系, 并证明你的结论.



【答案】 $\angle ADE + \angle AFC = 180^\circ$. 证明见解析 .

【解析】 手拉手全等 $\triangle BAE \cong \triangle CAD$ (SAS) ,

$\therefore \angle ABE = \angle ACD$ (8 字导角得) ,

$\angle BAC = \angle BFC$, 易得 (面积相等) AF 平分 $\angle BFD$,

设 $\angle BAC = \angle EAD = \alpha$, 则 $\angle ADE = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$,

$\angle AFC = \angle AFB + \angle BFC = \frac{\angle BFD}{2} + \alpha = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$,

$\therefore \angle ADE + \angle AFC = 180^\circ$.

【标注】 【知识点】 等腰三角形的手拉手模型

28. 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = AC$, 点 D 是 BC 上一点 (不与 B , C 重合) , 以 AD 为一边在 AD 的右侧作 $\triangle ADE$, 使 $AD = AE$, $\angle DAB = \angle EAC$, 连接 CE .

(1) 如图1 , 若 $\angle BAC = 90^\circ$.

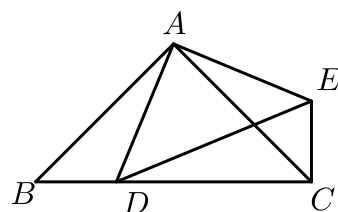


图1

① 求证 : $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

② 求 $\angle BCE$ 的度数 .

(2) 设 $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCE = \beta$, 如图2 , 则 α , β 之间有怎样的数量关系 ? 并说明理由 .

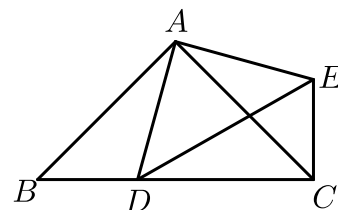


图2

【答案】(1) 证明见解析.

② 90° .

(2) $\alpha + \beta = 180^\circ$, 证明见解析.

【解析】(1) ① 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AE \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS})$.

② $\because \triangle ABD \cong \triangle ACE$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$,

$\therefore \angle BCE = \angle BCA + \angle ACE = \angle BCA + \angle ABD$,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCA + \angle ABD = 180^\circ - \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCE = 90^\circ$.

(2) $\alpha + \beta = 180^\circ$.

由①知 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$,

$\therefore \angle BCE = \angle BCA + \angle ACE = \angle BCA + \angle ABD = \beta$,

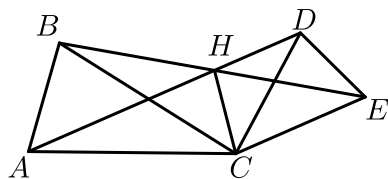
$\therefore \angle BAC = \alpha$,

$\therefore \angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ$,

即 $\alpha + \beta = 180^\circ$.

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

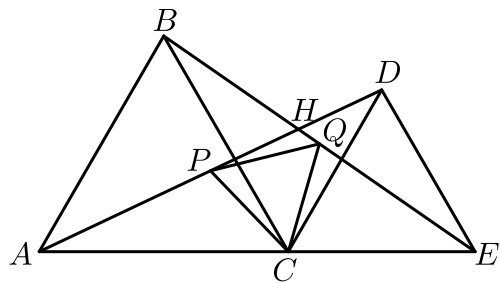
29. 如图, $CA = CB$, $CD = CE$, $\angle ACB = \angle DCE = \alpha$, AD 、 BE 交于点 H , 连接 CH .



(1) 求 $\angle AHE$ 的度数. (用 α 表示)

(2) 求证: HC 平分 $\angle AHE$.

(3) 如图, 若 $\alpha = 60^\circ$, P 、 Q 分别是 AD 、 BE 的中点, 连接 CP 、 PQ 、 CQ . 请判断三角形 PQC 的形状, 并证明你的结论.



【答案】(1) $\angle AHE = 180^\circ - \alpha$.

(2) 证明见解析.

(3) $\triangle PQC$ 是等边三角形, 证明见解析.

【解析】(1) $\because \angle ACB = \angle DCE = \alpha$,

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} CA = CB \\ \angle ACD = \angle BCE \\ CD = CE \end{cases}$$

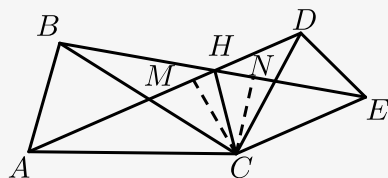
$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle AHB = \angle ACB = \alpha,$$

$$\therefore \angle AHE = 180^\circ - \alpha.$$

(2) 过点 C 作 $CM \perp AD$ 于 M , $CN \perp BE$ 于 N ,



由 (1) 知 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$,

$$\therefore \angle CAM = \angle CBN,$$

在 $\triangle ACM$ 和 $\triangle BCN$ 中,

$$\begin{cases} \angle CAM = \angle CBN \\ \angle AMC = \angle BNC = 90^\circ \\ AC = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACM \cong \triangle BCN \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CM = CN,$$

$$\therefore HC \text{ 平分 } \angle AHE.$$

(3) $\triangle PQC$ 是等边三角形,

证明如下:

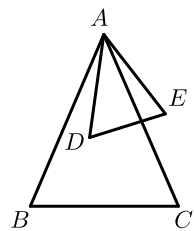
由 (1) 知 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$,
 $\therefore AD = BE$, $\angle PAC = \angle QBC$,
 $\because P, Q$ 分别是 AD, BE 的中点 ,
 $\therefore AP = BQ$,
 在 $\triangle APC$ 和 $\triangle BQC$ 中 ,

$$\begin{cases} AP = BQ \\ \angle PAC = \angle QBC \\ AC = BC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle APC \cong \triangle BQC$ (SAS) ,
 $\therefore CP = CQ$, $\angle PCA = \angle QCB$,
 $\therefore \angle PCQ = \angle ACB = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle PQC$ 是等边三角形 .

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

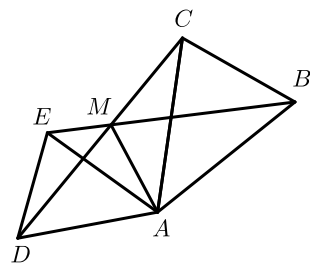
30. 规定：顶角相等且顶角顶点重合的两个等腰三角形互为“兄弟三角形” .

(1) 如图①，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，当 $\angle BAC$ 、 $\angle BAD$ 、 $\angle BAE$ 满足条件 _____ 时， $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 互为“兄弟三角形” .



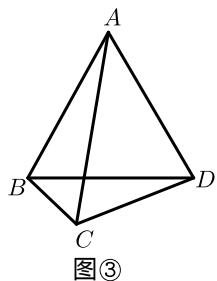
图①

(2) 如图②， $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 互为“兄弟三角形”， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， BE 、 CD 相交于点 M ，连 AM ，求证： MA 平分 $\angle BMD$.



图②

(3) 如图③，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = AB$ ， $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ ， $AC = BC + DC$ ，求 $\angle BAD$ 的度数 .



图③

【答案】(1) $\angle BAE = \angle BAC + \angle BAD$

(2) 证明见解析.

(3) $\angle BAD = 60^\circ$.

【解析】(1) $\because$ 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中,

$$AB = AC, AD = AE,$$

$\therefore$ 当 $\angle BAC = \angle DAE$ 时, $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 互为“兄弟三角形”,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE + \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BAC + \angle BAD,$$

故当 $\angle BAE = \angle BAC + \angle BAD$ 时,

$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 互为“兄弟三角形”,

故答案为: $\angle BAE = \angle BAC + \angle BAD$.

(2) $\because$ 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 互为“兄弟三角形”,

$$AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE,$$

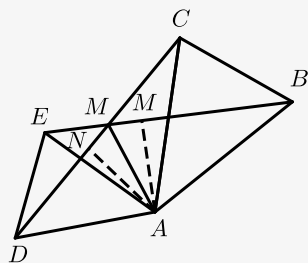
$$\therefore \angle BAE = \angle CAD,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABE \text{ 与 } \triangle ACD \text{ 中 } \begin{cases} AB = AC \\ \angle BAE = \angle CAD, \\ AE = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD (\text{SAS}),$$

过点 A 作 $AM \perp BE$ 于点 M , 作 $AN \perp CD$ 于点 N ,

如图②,

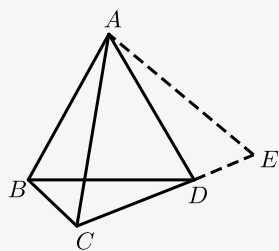


图②

$\therefore AM = AN$ (全等三角形的对应高相等),

$\therefore MA$ 平分 $\angle BMD$.

(3) 延长 CD 至 E , 使得 $DE = BC$, 连接 AE , 如图③ ,



图③

$$\because \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ ,$$

$$\because \angle ADC + \angle ADE = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADE ,$$

$$\therefore \text{在} \triangle ABC \text{和} \triangle ADE \text{中} \begin{cases} BC = DE \\ \angle ABC = \angle ADE , \\ AB = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore AC = AE , \angle BAC = \angle DAE ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE ,$$

$$\because AC = BC + DC = DE + DC = CE ,$$

$$\therefore AC = CE = AE ,$$

$$\therefore \angle CAE = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = 60^\circ .$$

【标注】【知识点】与三角形有关的新定义